INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE ET DES ÉTUDES ÉCONOMIQUES

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ADMINISTRATION ÉCONOMIQUE

concours pour l'admission d'élèves titulaires statisticiens économistes

JUIN 1995

Option : **MATHÉMATIQUES**

troisième composition de mathématiques

DURÉE : 2 heures

Le sujet comprend 3 pages.

Les parties II et III sont indépendantes.

Les candidats pourront admettre un résultat qu'ils n'auraient pas démontré à condition de le préciser explicitement.

Il sera tenu le plus grand compte de la rigueur et de la clarté du raisonnement.

Dans tout le problème, $(X, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach (*id est* : un espace vectoriel normé complet), Q un sous-ensemble fermé de X et f une application de Q dans Q.

On dit que f est une contraction si et seulement si il existe $q \in [0, 1[$ tel que $\forall (x, y) \in Q^2$, $\|f(x) - f(y)\| \leqslant q \|x - y\|$.

Le plus petit réel q vérifiant cette propriété est appelé le rapport de f.

$x^* \in X$ est un point fixe de f si et seulement si $f(x^*) = x^*$.

On note pour $x \in X$ et $r \in \mathbb{R}^{+*}$:

$$\mathscr{B}(x, r) = \{y \in X ;\ \|x - y\| \leqslant r\}.$$

I

1. Montrer que toute contraction f admet un unique point fixe x^* et que pour tout $x_0 \in Q$, la suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ définie $\forall n \geqslant 1$ par $x_n = f(x_{n-1})$ converge vers x^*.

2. Établir la majoration :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \|x_n - x^*\| \leqslant \frac{q^n}{1-q} \|f(x_0) - x_0\|$$

où q est le rapport de la contraction f et $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie à la question précédente.

3. On suppose, dans cette question uniquement, que pour tout x, y éléments de Q, tels que $x \neq y$, on a : $\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$.

   a. Montrer que si Q est compact, f admet un unique point fixe x^* et que la suite définie à la question I.1. converge vers x^*.

   b. Donner un exemple où $Q = X$ et f n'admet pas de point fixe.

4. Soit $a \in X$, $r \in \mathbb{R}^{+*}$ et g une application de $\mathscr{B}(a, r)$ dans X.

   On suppose que $\forall x, y \in \mathscr{B}(a, r)$, $\|g(x) - g(y)\| \leqslant \left(1 - \frac{\|g(a) - a\|}{r}\right) \|x - y\|$.

   Montrer que g a un point fixe.

   Est-il unique ?

5. On considère l'équation :

   (1) $$x - e \sin x = 2\pi t$$

   où e, x, t sont des réels.

   a. Montrer que $\forall (e, t) \in]0, 1[\times \mathbb{R}$, il existe une et une seule valeur de x solution de (1), que l'on notera $x(e, t)$.

   b. Pour $e = 0{,}5$ et t variant de 0 à 1, de $\frac{1}{12}$ en $\frac{1}{12}$, calculer, en utilisant la méthode exposée dans les questions I.1. et I.2., $x(e, t)$ à 10^{-2} près.

   Donner le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir la précision demandée si l'on prend $x_0 = 0$.

   c. Même question pour e variant de 0,25 à 0,75, de 0,05 en 0,05 et $t = \frac{1}{4}$.

II

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ que l'on confondra avec l'application linéaire qui lui est associée dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

On pose :

$$A = ((a_{ij}))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}.$$

1. Trouver, dans chacun des cas suivants, une norme de $\mathbb{R}^n$ pour laquelle A est contractante :

   a. $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_{ij})^2 < 1.$

   b. $\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| < 1.$

   c. $\max_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| < 1.$

2. Soit $b \in \mathbb{R}^n$. On considère l'équation :

(2) $$Ax = b, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Montrer que si :

(3) $$\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii} \right)^2 > (n-1) \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2,$$

alors (2) admet une unique solution x^* et qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que la suite définie par :

$$x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad \forall n \geqslant 1, \quad x_n = (\lambda A + I) x_{n-1} - \lambda b$$

converge vers x^*, I désignant la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Quelle valeur de λ faut-il prendre ?

3. Même question, en supposant, en lieu et place de (3), que :

(4) $$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad a_{ii} > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|.$$

III

Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Pour $\varphi \in E$, on pose $\|\varphi\| = \sup_{x \in [0,1]} |\varphi(x)|$.

Montrer que $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach.

2. On fixe $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$ et $\psi \in E$.

Ψ désigne une primitive de ψ.

Soit f_1 l'application de E dans E qui à tout φ fait correspondre $f_1(\varphi)$ défini par :

$$\forall t \in [0, 1], \quad f_1(\varphi)(t) = \lambda \int_0^t \psi(u)\, \varphi(u)\, du + \alpha.$$

Déterminer les points fixes de f_1.

3. On définit la suite $\{\varphi_n\}$ par : $\varphi_0 = 0$ et $\forall n \geqslant 1, \quad \varphi_n = f_1(\varphi_{n-1})$.

Donner l'expression de φ_n en fonction de n, α, λ et Ψ

4. Montrer que $|\lambda| \, \|\psi\| < 1$ implique que f_1 est contractante.

La réciproque est-elle vraie ? (Justifier la réponse.)

5. À partir de maintenant, et jusqu'à la fin du problème, on suppose que la condition $|\lambda| \, \|\psi\| < 1$ est vérifiée.

Soit alors φ^* l'unique point fixe de f_1.

Majorer $\|\varphi_n - \varphi^*\|$ en fonction de n, α, λ et $\|\psi\|$, où $\{\varphi_n\}$ est la suite définie à la question III.3.

6. En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, donner une autre majoration de $\|\varphi_n - \varphi^*\|$ en fonction de n, α, λ et $\|\psi\|$. Comparer avec le résultat de la question précédente.